Or $V_0 = \frac{U_0}{\sqrt{1+U_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N} : \boxed{V_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + n}$

*/ on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$V_n = \frac{1}{U_n^2} \Leftrightarrow U_n^2 = \frac{1}{V_n} \Leftrightarrow \sqrt{U_n^2} = \sqrt{\frac{1}{V_n}} = \frac{1}{\sqrt{V_n}}$

$\Leftrightarrow |U_n| = U_n = \frac{1}{\sqrt{V_n}}$ Car $U_n \geq 0$

$\Leftrightarrow \boxed{U_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + n}}, n \in \mathbb{N}}$

*/ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

c/ $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_n$: Somme de n premier terme d'une suite arithmétique. $S_n = n \times \frac{V_0 + V_{n+1}}{2}$

$= n \times \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + n - 1}{2} = n \times \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + n - 1}{2}$

$\boxed{S_n = n\left(\frac{\sqrt{2} - 1 + n}{2}\right), n \in \mathbb{N}^*}$

*/ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2 - n + \sqrt{2}n}{2n^2}$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)}{2n^2} = \frac{1 - 0 + 0}{2}$

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{1}{2}}$

Exercice 14

$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}; I_n = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt, n \geq 1$

1) a/ $I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt$

$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{t^2}{1+t^2}\right) dt = \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^2} dt = \int_0^1 dt = 1$

*/ comme: $I_0 = \frac{\pi}{4}$

On a : $I_0 + I_1 = 1 \Rightarrow I_1 = 1 - I_0 \Rightarrow I_1 = 1 - \frac{\pi}{4}$

Donc : $\boxed{\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = \frac{4-\pi}{4}}$

b/ $\forall n \in \mathbb{N}$:

$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$

$= \int_0^1 \left(\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} + \frac{t^{2n}}{1+t^2}\right) dt = \int_0^1 \frac{t^{2n}.t^2 + t^{2n}}{1+t^2} dt$

$= \int_0^1 \frac{t^{2n}\cancel{\left(t^2+1\right)}}{\cancel{1+t^2}} dt = \int_0^1 t^{2n} dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}}$

c/ on a : $t \in [0,1]$, donc : $t^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow t^2.t^{2n} \leq t^{2n} \Leftrightarrow \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq \frac{t^{2n}}{1+t^2}$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \Leftrightarrow I_{n+1} \leq I_n$

D'où (I_n) est décroissante

Aussi on a : $\frac{t^{2n}}{1+t^2} \geq 0$ donc $\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \geq 0$

Par suite $I_n \geq 0$ donc (I_n) est minorée par 0.

d/ (I_n) décroissante est minorée par 0 d'où c'est une suite convergente.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn